

# Interpolação Polinomial

---

## Objetivo

A interpolação polinomial tem por objetivo aproximar funções (tabeladas ou dadas por equações) por polinômios de grau até  $n$ . Isso tem como intuito facilitar o cálculo das funções em pontos que não são dados (interpolar significa calcular pontos **internos** não dados).

Se definirmos o polinômio aproximador  $P(x)$  como sendo:

$$p(x) = a_0 + a_1(x) + a_2(x^2) + \dots + a_n(x^n)$$

Precisaremos apenas encontrar os coeficientes  $a_i$  do polinômio.

Para isso basta resolver o sistema linear:

$$p(x_0) = a_0 + a_1(x_0) + a_2(x_0^2) + \dots + a_n(x_0^n) = y_0$$

$$p(x_1) = y_1$$

$$\vdots$$

$$p(x_n) = y_n$$

Que, em notação matricial, fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pode-se demonstrar que a solução desse sistema linear é única, e que, portanto, o polinômio aproximador de grau até  $n$  é único para uma dada função.

Porém, a resolução desse sistema linear não é viável usando métodos convencionais, portanto utilizaremos métodos desenvolvidos especialmente para encontrar os coeficientes desse polinômio.

# Método de Lagrange

## Intuição

O método de Lagrange define polinômios multiplicadores dos valores tabelados de  $y_0$  que tem a propriedade particular de serem iguais a 1 quando são avaliados no ponto que devem aproximar, e 0 em qualquer outro ponto tabelado da função. Sendo assim, definimos:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

Observe que, pela citada propriedade:

$$p(x_0) = y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \dots + y_n L_n(x_0) = y_0(1) + y_1(0) + \dots + y_n(0) = y_0$$

Como  $p(x_i) = y_i \forall i \in [0, n]$ , encontramos o polinômio que aproxima a função para os valores tabelados.

## Encontrando os polinômios de Lagrange:

O polinômio de Lagrange é definido por:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Observe que pulamos o monômio  $(x - x_i)$  para que não haja raiz em  $x_i$ . Analogamente, não dividimos pelo número real  $(x_i - x_i)$  pois ele é igual a zero.

## Exemplo:

Dada a função tabelada abaixo, encontrar o polinômio interpolador:

x	f(x)=y
-1	3
0	-1
1	2

Como a tabela dada tem 3 pontos, devemos encontrar um polinômio de grau até 3.

Não há como saber, a princípio, qual será o grau do polinômio resultante, e isso não está relacionado ao número de pontos dados. Se os pontos forem colineares, por exemplo, o polinômio aproximador será uma reta.

## Encontrando os polinômios de Lagrange:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1}{2}x(x - 1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = (1 - x^2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1}{2}x(x + 1)$$

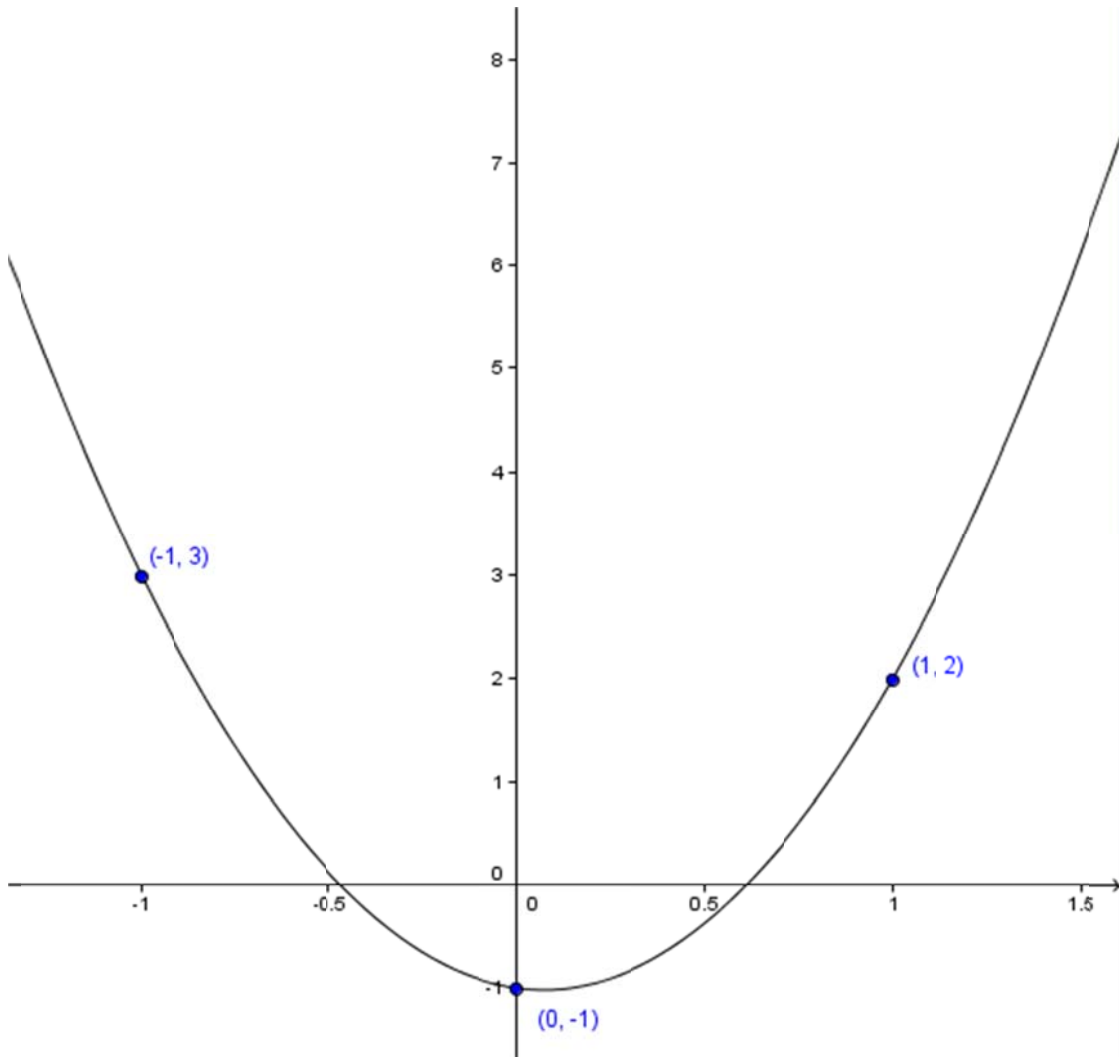
### Fazendo o polinômio aproximador:

Como já definimos:

$$p(x) = L_0 y_0 + L_1 y_1 + L_2 y_2 = 3 \left( \frac{1}{2} x (x - 1) \right) - 1 \left( (1 - x^2) \right) + 2 \left( \frac{1}{2} x (x + 1) \right)$$

$$p(x) = \frac{1}{2} (7x^2 - x - 2)$$

De fato, esse é o polinômio aproximador para os pontos dados:



## Método de Newton

Para a construção do polinômio aproximador, o método de Newton utiliza um método indutivo, isto é, ele constrói o polinômio aproximador de ponto em ponto.

Suponha uma sequência de pontos  $(x, y)$  onde  $\begin{cases} x_0, x_1 \dots x_n \text{ são distintos entre si} \\ y_0, y_1 \dots y_n \text{ são reais quaisquer} \end{cases}$

Definimos o polinômio aproximador de Newton como sendo:

$$p_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})a_n$$

Logo, podemos encontrar o polinômio aproximador do primeiro ponto  $(x_0, y_0)$ :

$$p_0(x) = y_0$$

Essa aproximação é válida para o único ponto  $(x_0, y_0)$ , e é com base nela que continuaremos o método para aproximar os outros pontos.

Para encontrarmos o próximo ponto, fazemos:

$$p_1(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 \rightarrow p_1(x) = y_0 + (x - x_0)a_1$$

Como  $p_1(x_1) = f(x_1) = y_1$  e  $a_0 = p_0(x) = y_0$ , temos:

$$p_1(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0)a_1 = y_1 \rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = p_0(x) + (x - x_0) \frac{(y_1 - p_0(x_1))}{(x_1 - x_0)}$$

O número real em vermelho é denominado **diferença dividida entre  $x_0$  e  $x_1$** , e é denotado de forma mais compacta por  $f[x_0, x_1]$ .

O polinômio  $p_1(x)$  agora aproxima os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . Podemos estender essa indução para  $i$  e  $j$  termos, sendo  $i$  o termo inicial e  $j$  o termo final que o polinômio aproximador leva em conta:

$$p_j^i(x) = p_{j-1}^i(x) + (x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{j-1})(x - x_j) \frac{y_j - p_{j-1}^i(x_j)}{(x_j - x_i)(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_{j-1})}$$

**Note que, para o cálculo do polinômio aproximador  $p_j^i(x)$  dos pontos  $[i, i + 1, \dots, j]$ , basta termos o polinômio aproximador “anterior”  $p_{j-1}^i(x)$  e o valor de  $y_j = f(x_j)$ . Novamente, o número real em vermelho é a diferença dividida entre  $x_j$  e  $x_i$ .**

Para calcularmos a diferença dividida entre  $i$  e  $j$ , podemos usar o lema:

$$f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

## Método prático: Tabela

O método prático para o cálculo dos multiplicadores reais dos polinômios  $(x - x_i) \dots (x - x_j)$  é utilizar uma tabela dos valores de  $f[x_i, \dots, x_j]$ , construída de ponto em ponto.

n	x	y	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	$x_0$	$y_0$	$f[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	...
1	$x_1$	$y_1$	$f[x_1, x_2] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$	$\vdots$	
2	$x_2$	$y_2$	$\vdots$		

**Exemplo:** Dada a função tabelada, encontrar o polinômio aproximador utilizando o método de Newton.

x	f(x) = y
-1	1
0	-1
3	-5
4	-2
5	3

O primeiro procedimento é fazer a tabela de diferenças divididas, e construir o polinômio a partir daí. Utilizaremos o lema dado na seção anterior para calcular os próximos valores da tabela.

Note que, ao obter os valores de  $f[x_0, x_1]$ , por exemplo, estaremos obtendo os coeficientes do polinômio aproximador, o que já nos vai permitir interpolar entre os pontos  $x_0$  e  $x_1$ .

**Fazendo a tabela de  $f[x_i \dots x_j]$ :**

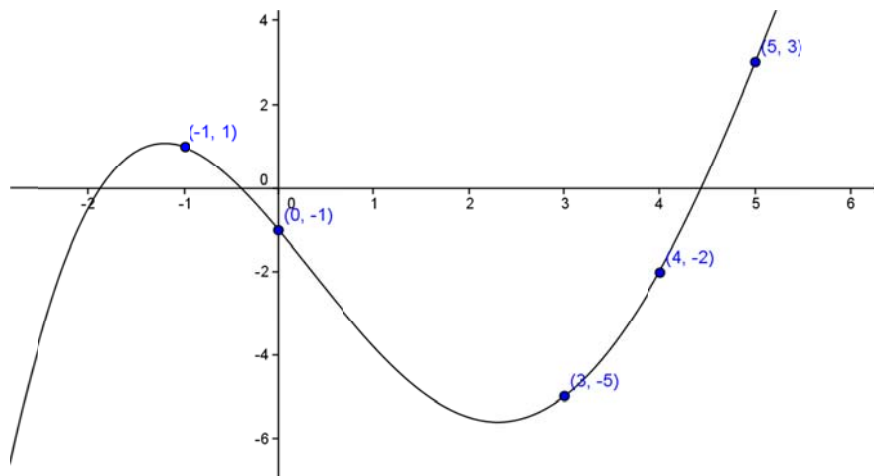
n	x	y	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	-1	1	$\frac{-1 - 1}{0 - (-1)} = -2$	$\frac{-\frac{4}{3} + 2}{3 - (-1)} = \frac{1}{6}$	$\frac{\frac{13}{12} - \frac{1}{6}}{4 - (-1)} = \frac{11}{60}$	$\frac{\frac{11}{60} + \frac{1}{60}}{5 - (-1)} = -\frac{1}{30}$
1	0	-1	$\frac{-5 - 1}{3 - 0} = -\frac{4}{3}$	$\frac{3 + \frac{4}{3}}{4 - 0} = \frac{13}{12}$	$\frac{1 - \frac{13}{12}}{5 - 0} = -\frac{1}{60}$	
2	3	-5	$\frac{-2 + 5}{4 - 3} = 3$	$\frac{5 - 3}{5 - 3} = 1$		
3	4	-2	$\frac{3 + 2}{5 - 4} = 5$			
4	5	3				

Agora que possuímos os coeficientes, podemos escrever todos os polinômios interpoladores:

$$p_4^0(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$p_4^0(x) = 1 - 2(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 1)(x - 0) + \frac{11}{60}(x + 1)(x - 0)(x - 3) - \frac{1}{30}(x + 1)(x - 0)(x - 3)(x - 4)$$

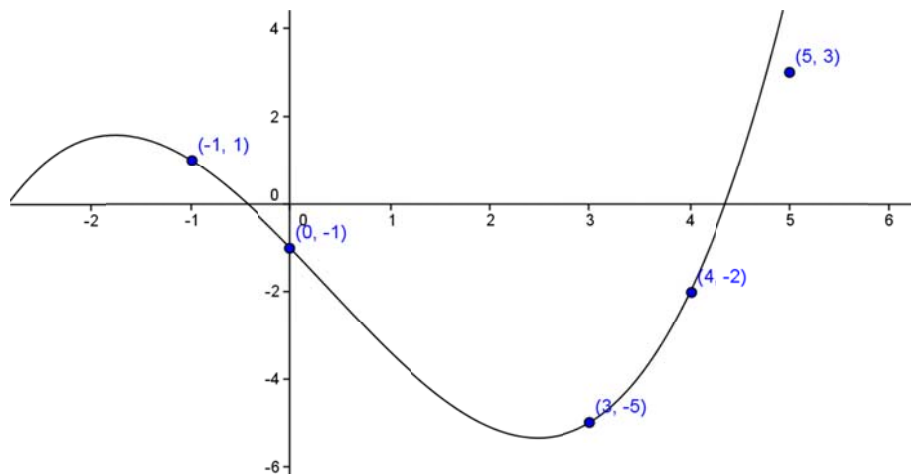
**$p_4^0(x)$  é o polinômio interpolador dos pontos de índice 0 a 4:**



$$p_3^0(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3^0(x) = 1 - 2(x + 1) + \frac{1}{6}(x + 1)(x - 0) + \frac{11}{60}(x + 1)(x - 0)(x - 3)$$

**$p_3^0(x)$  é o polinômio interpolador dos pontos de índice 0 a 3:**

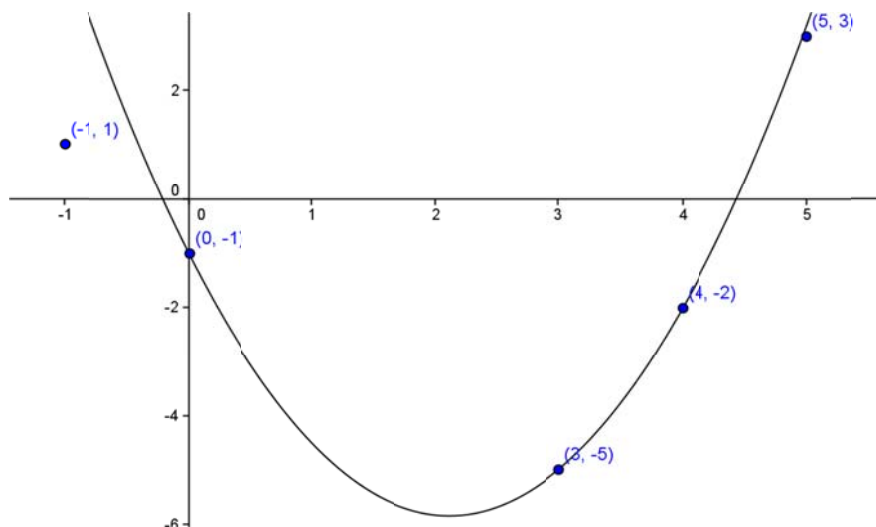


Não necessariamente precisamos iniciar a interpolação em  $n=0$ ; supondo que quiséssemos interpolar os pontos  $x_1, x_2$  e  $x_3$ :

$$p_3^1(x) = f[1] + f[1,2](x - x_1) + f[1,2,3](x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3^1(x) = -1 - \frac{4}{3}(x - 0) + \frac{13}{12}(x - 0)(x - 3)$$

**$p_3^1(x)$  é o polinômio interpolador dos pontos de índice 1 a 3:**



## Caso particular do Método de Newton: Diferenças Simples

Na situação particular que tivermos pontos igualmente espaçados em  $x$ , os denominadores da tabela do cálculo dos  $f[x_i, \dots, x_j]$  ficam todos iguais. Para facilitar os cálculos, podemos definir:

- $h = x_{i+1} - x_i$  a diferença entre as abcissas dos pontos a serem aproximados
- $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$  a diferença entre as ordenadas dos pontos a serem aproximados
- $\Delta^k(x) = \Delta^{k-1}f(x+h) - \Delta^{k-1}f(x)$  a  $k$ -ésima diferença simples de  $f(x)$ .

Exemplo de  $k$ -ésima diferença simples:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x))$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) + 2f(x+h) + f(x)$$

A relação entre os  $\Delta f$  e os  $f[x_i, \dots, x_j]$  é proporcional ao  $h$  e a  $k$ :

$$f[x_i \dots x_j] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k}$$

Para construir a tabela, usamos os valores de  $\Delta^k f(x_i)$  e, no final, dividimos por  $k! h^k$  para obter  $f[x_i \dots x_j]$

### Exemplo:

Aproximar a função tabelada abaixo usando o método de Newton:

n	x	y	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	-1	-2	$3 + 2 = 5$	$2 - 5 = -3$	$-7 + 3 = -4$	$29 + 4 = 33$	-106
1	0	3	$5 - 3 = 2$	$-5 - 2 = -7$	$22 + 7 = 29$	$0 - 29 = -73$	$\div 120h^5$
2	1	5	$0 - 5 = -5$	$17 + 5 = 22$	$-22 + 22 = 44$	$\div 24h^4$	
3	2	0	$17 - 0 = 17$	$-5 - 17 = -22$	$\div 6h^3$		
4	3	17	$12 - 17 = -5$	$\div 2h^2$			
5	4	12	$\div h$				

$$h = x_1 - x_0 = 1$$



Para obtermos o polinômio aproximador:

$$\begin{aligned}
 p_5^0(x) = f[x_0] &+ \frac{\Delta f(0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 f(0)}{6h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &+ \frac{\Delta^4 f(0)}{24h^4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\
 &+ \frac{\Delta^4 f(0)}{24h^4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
 &+ \frac{\Delta^5 f(0)}{120h^5}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Logo, } p_5^0(x) = &-2 + \frac{5}{1}(x + 1) - \frac{3}{2}(x + 1)(x - 0) - \frac{4}{6}(x + 1)(x - 0)(x - 1) + \frac{33}{24}(x + 1)(x - 0)(x - \\
 &1)(x - 2) - \frac{106}{120}(x + 1)(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)
 \end{aligned}$$

